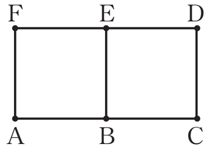
第２講　確率

5　6個の点A，B，C，D，E，Fが右図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を0とする．このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ．



《15 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1)　石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2)　石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7 さいころを n 回投げて出た目を順に X_1, X_2, $\cdots$, X_n とする．さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \cdots, n)$$

によって Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_n を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．《12 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　２つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1, 2, \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．《15 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

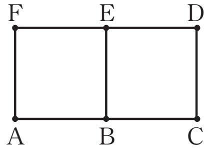
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　確率

5　6個の点A，B，C，D，E，Fが右図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を0とする．このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ．



《15 京大・文系》

【答】　順に $\frac{69}{128}$，$\frac{7}{16}$，$\frac{3}{128}$

【解説】　$x=2$ となるとき，最短経路はA→F→EかA→B→Eとなる．AFとFEが共に赤である確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, ABとBEが共に赤である確率も同様に $\frac{1}{4}$．また, AF, FE, AB, BEのすべてが赤の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ より，$X=2$ となる確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{7}{16}}$.

$x=4$ となるとき，最短経路はA→B→C→D→Eとなる．AFとFEの少なくとも一方が黒の確率は $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，ABが赤でなおかつBEが黒でBC，CD，DEがすべて赤の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ なので，$X=4$ となる確率は $\frac{3}{4}\times\frac{1}{32}=\mathbf{\frac{3}{128}}$.

X の値は0または2または4のいずれかなので，$X=0$ となる確率は

$1-\frac{7}{16}-\frac{3}{128}=\mathbf{\frac{69}{128}}$.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6 投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

《13 京大・理系》

【答】 (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{2n}{4^n}$

【解説】 n 回硬貨を投げた後の石の座標を a_n で表すことにする．

このとき，①：$a_{n+1}=-a_n$ と②：$a_{n+1}=2-a_n$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で採用されて，次の石の位置が決まることになる．

(1) 石が x にあるときに，次の 2 回の硬貨投げにより

(Ⅰ) ①①の場合は「$x \to -x \to -(-x)=x$」,

(Ⅱ) ①②の場合は「$x \to -x \to 2-(-x)=x+2$」,

(Ⅲ) ②①の場合は「$x \to 2-x \to -(2-x)=x-2$」,

(Ⅳ) ②②の場合は「$x \to 2-x \to 2-(2-x)=x$」

と変化する．

2 回硬貨を投げて x にあるのは(Ⅰ)と(Ⅳ)の場合より，求める確率は $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) (Ⅱ), (Ⅲ)の確率はともに $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ である．

$2n$ 回硬貨を投げて，2 回ずつセットで考えたとき，(Ⅰ)または(Ⅳ), (Ⅱ), (Ⅲ)となる回数を順に p, q, r とすると，石が $2n-2$ となるので，

$$\begin{cases} p+q+r=n & \cdots③ \\ 0\times p+(+2)\times q+(-2)\times r=2n-2 & \cdots④ \\ p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0 & \cdots⑤ \end{cases}$$

③と $p\geqq 0$ より $q+r\leqq n$，これに④より得られる $q=r+n-1$ を代入すると

$(r+n-1)+r\leqq n \iff r\leqq\frac{1}{2}$ となるので，$r\geqq 0$ より $r=0$ よって $q=n-1$.

以上より $p=1$, $q=n-1$, $r=0$(これらは⑤を満たす)に決まる．

よって求める確率は

$$_{n}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{2n}{4^n}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7 さいころを n 回投げて出た目を順に X_1, X_2, …, X_n とする．さらに

$$Y_1=X_1,\quad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1, Y_2, …, Y_n を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．《12 京大・理系》

【答】 $p_n=\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

【解説】 帰納的に $Y_n\geqq 1$ である．

以下，$k=2$, 3, … で考える．

(Ⅰ) $1\leqq Y_{k-1}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき $\sqrt{3}-1<\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq 1$ より

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\right)\sqrt{3}<1+\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq 2(<1+\sqrt{3})$ であり，

2 以上の整数 m に対して $(1+\sqrt{3}\leqq)\sqrt{3}+m-1<m+\dfrac{1}{Y_{k-1}}$ である．

(Ⅱ) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_{k-1}\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\leqq\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq\sqrt{3}-1$ より

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\leqq 1+\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq\sqrt{3}(<1+\sqrt{3})$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\right)\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}\leqq 2+\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$ であり，

3 以上の整数 m に対して $(1+\sqrt{3}<)\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+m\leqq m+\dfrac{1}{Y_{k-1}}$ である．

(Ⅲ) $Y_{k-1}>1+\sqrt{3}$ のとき $0<\dfrac{1}{Y_{k-1}}<\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ より

$1+\dfrac{1}{Y_{k-1}}<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\right)2<2+\dfrac{1}{Y_{k-1}}<\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}(<1+\sqrt{3})$ であり，

3 以上の整数 m に対して $(1+\sqrt{3}<)m<m+\dfrac{1}{Y_{k-1}}$ である．

$Y_n<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる確率を l_n，$Y_n>1+\sqrt{3}$ となる確率を h_n とすると，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}\times l_n+\frac{2}{6}\times p_n+\frac{1}{6}\times h_n$$

が成り立つが，$l_n+p_n+h_n=1 \iff l_n+h_n=1-p_n$ であることより

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}(1-p_n)+\frac{2}{6}p_n \iff p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$$

$$\iff p_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$$

より $p_n-\dfrac{1}{5}=\left(p_1-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$.

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_1 \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは $X_1=2$ のときのみなので，$p_1=\dfrac{1}{6}$.

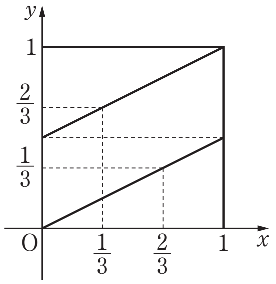
よって $\boldsymbol{p_n}=\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n}\right\}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　2つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．　《15 京大・理系》

【答】　$P_n=\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

【解説】　$y=f_0(x)$ と $y=f_1(x)$ のグラフ(右図)より



$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ のとき，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $0<x_n<\dfrac{1}{6}$ または $\dfrac{1}{2}<x_n<\dfrac{2}{3}$ となる．

$\dfrac{1}{3}<x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ のとき，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $\dfrac{1}{6}<x_n<\dfrac{1}{3}$ または $\dfrac{2}{3}<x_n<\dfrac{5}{6}$ となる．

$\dfrac{2}{3}<x_{n-1}<1$ のとき，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $\dfrac{1}{3}<x_n<\dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{5}{6}<x_n<1$ となる．

また，$x_0=\dfrac{1}{2}$ より，帰納的に $x_n(n\geqq 0)$ は 0，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，1 となることはない．

ここで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}<x_n<\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}<x_n<1$ となる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times a_n+\dfrac{1}{2}\times b_n+0\times c_n & \cdots① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times a_n+0\times b_n+\dfrac{1}{2}\times c_n & \cdots② \\ c_{n+1}=0\times a_n+\dfrac{1}{2}\times b_n+\dfrac{1}{2}\times c_n & \cdots③ \end{cases}$$

が成立する．このとき $a_n+b_n+c_n=1 \iff a_n+c_n=1-b_n$ であることより②は

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n) \iff b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

$$\iff b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\ b_n-\frac{1}{3}=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．ここで $x_0=\dfrac{1}{2}$ より $b_0=1$ なので $b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

また，③－①より $c_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(c_n-a_n)$ なので $c_n-a_n=(c_0-a_0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となるが，$b_0=1$ より $a_0=c_0=0$ なので $c_n-a_n=0$ ゆえに $c_n=a_n$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

この結果と $a_n+b_n+c_n=1$ より $a_n=c_n=\dfrac{1-b_n}{2}$.

よって $\boldsymbol{P_n}=a_n+b_n=\dfrac{1+b_n}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。